

Diferansiyel Denklemler

yüksek mertebeden Dif. Denklemler

$$y^{(n)} + y^{(n-1)} + \dots + y = 0 \rightarrow \text{yüksek mertebe.}$$

örnek: $y'' = 3x^2$

$$y' = x^3 + C_1$$

$$y = \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2$$

} özel çözüm

* Bağımlı değişken dif. denklem

Değişken (y) bağımlı denklemlerde

$$y' = p \quad \text{dönüşümleri yapacağız}$$

$$y'' = p'$$

⋮

örnek: $x \cdot y' - 4y' = x^5$ dif. denklem genel çözüm bulunuz.

$$y' = p$$

$$y'' = p' \Rightarrow x \cdot p' - 4p = x^5$$

$$p' - \frac{4}{x} p = x^4 \Rightarrow \text{lineer dif}$$

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{x} dx}$$

$$\Rightarrow = e^{-4 \ln(x)} \Rightarrow = x^{-4} \quad \left\{ \int (p \cdot x^{-4})' = \int x^4 \cdot x^{-4} \cdot 1 \right.$$

$$p \cdot x^{-4} = x + C$$

$$p = x^5 + C \cdot x^4$$

$$\int y' = \int x^5 + \int C x^4$$

$$y = \frac{x^6}{6} + \frac{C x^5}{5} + C_1$$

örnek: $x \cdot y'' + y' = 12x$ $y_3 = ?$

$$y' = p$$

$$y'' = p' \quad \left\{ \begin{array}{l} x \cdot p' + p = 12x \\ \Rightarrow p' + \frac{1}{x} p = 12 \end{array} \right. \quad \text{lineer dif}$$

$$\mu(x) = x$$

$$\Rightarrow \int (p \cdot x)' = \int 12 \cdot x dx \Rightarrow p \cdot x = 6x^2 + C_1$$

$$p = 6x + \frac{C_1}{x} \Rightarrow \int y' = \int 6x + \int \frac{C_1}{x}$$

$$y' = 3x^2 + C_1 \cdot \ln(x) + C_2$$

$$* y = x^3 + C_1 \cdot (x \cdot \ln(x) - x) + C_2 \cdot x + C_3$$

Bağımsız dif. denklem

Bağımsız değişken (x)

$$\frac{dy}{dx} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = p'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

$$y''' = ? \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} + p \cdot \frac{d^2p}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

p'nin türevi

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = p \cdot \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2p}{dy^2}$$

$$(p)' = \frac{dp}{dy} \quad (x) \text{ bağımsız} \rightarrow \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

*sonuç

$$\frac{dy}{dx} = p = y'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dy} = y''$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = p \cdot \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2p}{dy^2}$$

Örnek: $(y+1) \cdot y'' = (y')^2$

genel çözüm bulunuz

$$(y+1) \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = p^2$$

$$\Rightarrow (y+1) \frac{dp}{dy} = p$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y+1}$$

$$\Rightarrow \ln(p) = \ln(y+1) + \ln(c)$$

$$p = c_1(y+1)$$

$$y' = c_1(y+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1(y+1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{y+1} = c_1 \cdot dx \end{array} \right.$$

$$\ln(y+1) = c_1 x + \ln(c_2)$$

$$y+1 = e^{c_1 x} \cdot c_2$$

$$y = c_2 \cdot e^{c_1 x} - 1$$

Örnek: $y \cdot y'' + (y')^2 = (y')^2$

$$y' = p$$

$$y' = p \cdot \frac{dp}{dy} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = p^2 \end{array} \right. \Rightarrow -y \cdot \frac{dp}{dy} = p^2 - p \Rightarrow \int \frac{dp}{p^2 - p} = \int \frac{-dy}{y}$$

$$\int \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} dp = - \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(p-1) - \ln(p) = -\ln(y) + \ln(c)$$

$$\frac{p-1}{p} = c_1 \cdot y \Rightarrow -\frac{1}{p} = \frac{c_1}{y} - 1$$

$$* -\frac{dx}{dy} = \frac{c_1}{y} - 1$$

$$* -x = c_1 \cdot \ln(y) - y + c_2$$

Diferansiyel Denklemler

2. Mertebedem Dif. Denklemler.

$$y'' = F(y, y')$$

$$y' = p$$

$$y'' = (y')^2 \cdot \frac{1}{y}$$

$$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

Bağımsız dif

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} p \cdot \frac{dp}{dy} &= p^2 \cdot \frac{1}{y} \\ \int \frac{dp}{p} &= \int \frac{dy}{y} \end{aligned} \right\} \ln(p) = \ln(y) + \ln(c_1)$$

$$p = c_1 \cdot y$$

$$\Rightarrow y' = c_1 \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \cdot y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int c_1 \cdot dx$$

$$\Rightarrow \ln(y) = c_1 \cdot x + \ln(c_2)$$

$$y = c_2 \cdot e^{c_1 \cdot x}$$

*Sabit kat sayılı Homojen Denklemler

$$y_g = y_h + y_{\text{ö}} \rightarrow \text{özel kısmı}$$

homojen
kısmı

homojen dif denklem her zaman sıfıra eşit, ve bu şekilde dönüşüm yapılır

$$* y = e^{mx} \text{ dönüşüm}$$

$$y' = m \cdot e^{mx}$$

$$y'' = m^2 \cdot e^{mx}$$

$$a \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

→ homojen dif denklem

$$\Rightarrow a \cdot m^2 \cdot e^{mx} + b \cdot m \cdot e^{mx} + c \cdot e^{mx} = 0$$

$$\underbrace{e^{mx}}_{\text{sıfır vermez}} (am^2 + bm + c) = 0 \quad e^{mx} \neq 0$$

$$\Rightarrow am^2 + bm + c = 0$$

*lineer bağımsızdır : * $C_1 = C_2 = 0$

ör: $y_1 = e^m$, $y_2 = e^{-m}$, $\{y_1, y_2\}$ fonksiyonların lineer bağımsız gösteriniz

$$C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = 0 \quad \text{ve} \quad C_1 = C_2 = 0 \text{ olmalı}$$

$$C_1 \cdot e^m + C_2 \cdot e^{-m} = 0 \Rightarrow C_1 \cdot e^m = -C_2 \cdot e^{-m} \quad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= -C_2 \cdot e^{-2m} \text{ veya } C_2 = -C_1 \cdot e^{-2m} \\ C_1 &= C_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow y_1$ ve y_2 lineer bağımsızdır

Diferansiyel Denklemler

*karakteristik Denklemin köklerine Bağlı Olarak 2.mertebeden Homojen

$$a, b, c \in \mathbb{R} \quad *ay'' + by' + cy = 0$$

$$* y = e^{mx} \text{ dönüşüm yapılacaktır}$$

$$y' = m e^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

$$\Rightarrow e^{mx} (am^2 + bm + c) = 0 \quad e^{mx} \neq 0$$

$$\Rightarrow am^2 + bm + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{ve} \quad m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

1) karakteristik Denklemin kökleri Reel ve farklı

$$am^2 + bm + c = 0 \quad , \quad \Delta > 0 \text{ olmak üzere}$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}$$

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

örnek: $y'' - 2y' - 3y = 0$ homojen çözüm buluyoruz

$$y = e^{mx}$$

$$y' = m e^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

$$e^{mx} (m^2 - 2m - 3) = 0 \quad e^{mx} \neq 0$$

$$(m-3)(m+1) = 0$$

$$m_1 = 3, \quad m_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{-x}$$

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

örnek: $y'' - 4y = 0$ homojen çözüm buluyoruz

$$y = e^{mx}$$

$$y' = m e^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

$$e^{mx} (m^2 - 4) = 0$$

$$m_1 = 2, \quad m_2 = -2$$

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Diferansiyel Denklemler

2) Karakteristik Denklemin kökleri katlı

$$am^2 + bm + c = 0, \Delta = 0 \text{ ise } \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 x \cdot y_2$$

önemli $y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = x \cdot e^{m_1 x}$

örnek: $y'' - 2y' + y = 0$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)^2 = 0 \quad \left. \vphantom{(m-1)^2 = 0} \right\} m_1 = m_2 = 1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^x, y_2 = x \cdot e^x$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$$

3) Karakteristik Denklemin Reel kök yoktur (kompleks)

$$am^2 + bm + c = 0, \Delta < 0 \Rightarrow m_{1,2} = a \pm bi \rightarrow \text{kökler ama her zaman } (+b) \text{ alıyoruz}$$

$$y_h = e^{ax} (c_1 \cdot \cos bx + c_2 \cdot \sin bx)$$

örnek: $y'' + 2y' + 4y = 0$ homojen çözüm bulunur

$$m^2 + 2m + 4 = 0$$

$$i^2 = -1$$

$$\Delta = 4 - 4(1)(4) = -12 < 0 \quad \left. \vphantom{\Delta = -12} \right\} \sqrt{\Delta} = \sqrt{-12}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12}i$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm 2\sqrt{3}i$$

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow y_h = e^{-x} (c_1 \cdot \cos \sqrt{3}x + c_2 \cdot \sin \sqrt{3}x)$$

örnek: $y'' + 4y = 0$

$$m^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 = -4 = 4i^2$$

$$m = \pm 2i$$

sıfır

$$a = 0, b = 2 \Rightarrow y_h = e^{0x} (c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x)$$

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

Diferansiyel Denklemler

Değişken katsayılı Homojen Denklemler:

Mertebe İndirgeme yöntemi:

2.mertebeden dif. denklemler $y_1(x)$ 1.mertebeden dif. denklemler

$y_2 = V \cdot y_1$ dönüşüm yapılacaktır

örnek: $x^2 y'' + 2xy' = 2y$, $y_1(x) = x$ diferansiyelindire kökünü ve genel
çözüm indirgeme yöntemiyle bulunur.

$$y_2 = V \cdot y_1(x) \Rightarrow y_2(x) = V \cdot x$$

$$y_2'(x) = V' \cdot x + V$$

$$y_2''(x) = V'' \cdot x + V' + V'$$

$$y_2''(x) = V'' \cdot x + 2V'$$

$$(V'' \cdot x + 2V') \cdot x^2 + 2(V' \cdot x + V) \cdot x - 2V \cdot x = 0$$

$$V'' \cdot x^3 + 2V' \cdot x^2 + 2V' \cdot x^2 + 2V \cdot x - 2V \cdot x = 0$$

$$V'' \cdot x + 4V' = 0$$

Bağımlı dif. denklemler

$$V' = p$$

$$V'' = p'$$

$$p' \cdot x + 4p = 0$$

$$\frac{dp}{dx} \cdot x = -4p \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{-4dx}{x} \Rightarrow \ln(p) = -4 \ln(x) + \ln(C)$$

$$\Rightarrow p = x^{-4}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{x^4}$$

$$V' = \frac{1}{x^4}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{x^4} \Rightarrow \int dV = \int \frac{dx}{x^4}$$

$$V = \frac{-1}{3x^3} + (C) \rightarrow \text{Sıfır indirgeme yöntemi}$$

$$y_2(x) = V \cdot y_1(x)$$

$$\Rightarrow y_2(x) = \frac{-1}{3x^3} \cdot x \Rightarrow y_2(x) = \frac{-1}{3x^2}$$

$$y_h = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

homojen
genel
çözüm

$$y_h = C_1 \cdot x - \frac{C_2}{3x^2}$$

Sabit integral
indirgeme yöntemi
kullanıyorsa
sıfır stabilizir

Diferansiyel Denklemler

Sabit katsayılı Lineer Homojen olmayan Dif. Denklemler:

* Genel Şekli:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$$

Genel çözüm : $y_g = y_h + y_ö$

Homojen
kısımın
genel çözümü

Denklemin bir özel çözümü

Belirsiz katsayılı metodu:

$b(x)$ bir vc fonksiyonu ise bu yöntem ile $y_ö$ bulunabilir

İstediğim

Lagünitma

Trigonometri

Polinom

$$\begin{aligned} & \begin{cases} e^x \\ e^x \\ e^x \\ e^x \end{cases} \\ & \begin{cases} \ln(x) \\ \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2} \\ \frac{2}{x^3} \end{cases} \end{aligned}$$

Belirsiz
ve vc fonk
bulabilir

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{cases} \end{aligned}$$

Belirsiz
ve vc fonk
bulabilir

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x^2 \\ 6x \\ 6 \\ 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e^{ax} , $\sin ax$, $\cos ax$, polinom ve
Sabit fonksiyon kullanabilir

Nasıl çözüyoruz?

1) vc kümesi bulunuz: denklemin sağ tarafı olan $b(x)$ ve türevlerinden oluşur

*Not: katsayılar önemli değildir

örnek $b(x) = \sin x \Rightarrow b'(x) = \cos x \quad b''(x) = -\sin x \quad b'''(x) = -\cos x$

$\Rightarrow vc = \{\sin x, \cos x\} \Rightarrow y_ö = A \sin x + B \cos x$

2) vc kümesinin elemanları belirsiz katsayılarla çarpılır ve birbirine eklenir

ve bu $y_ö$ yi verir

örnek : $b(x) = x^3 \quad b'(x) = 3x^2 \quad b''(x) = 6x \quad b'''(x) = 6 \quad b^{(4)}(x) = 0$

$vc = \{x^3, 3x^2, 6x, 6\}$ veya $vc = \{x^3, x^2, x, 1\}$

$y_ö = Ax^3 + 3Bx^2 + 6Cx + 6D$ veya $y_ö = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Diferansiyel Denklemler

örnek: $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x} + 2x$

$y = y_h + y_{\text{ö}}$

$y_{\text{ö}} = 4e^{3x} + 2x$

Homojen kısmı $\Rightarrow y'' - 3y' + 2y = 0$

özel kısmı Belirsiz yöntemi

$y = e^{mx}$
 $y' = m \cdot e^{mx}$
 $y'' = m^2 \cdot e^{mx}$
 $m^2 - 3m + 2 = 0$
 $(m-2)(m-1) = 0$

$e^{3x} \cdot e^{3x} \cdot e^{3x} \cdot e^{3x} = e^{3x}$
 $2x \cdot 2 = 0$

$m_1 = 2 \Rightarrow y_1 = e^{2x}$
 $m_2 = 1 \Rightarrow y_2 = e^x$
 $y_h = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^x$

$UC = \{e^{3x}, x, 1\}$

$y_{\text{ö}} = A \cdot e^{3x} + Bx + C$

$\Rightarrow y_{\text{ö}} = A \cdot e^{3x} + Bx + C$

$y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x} + 2x$

$y'_{\text{ö}} = 3Ae^{3x} + B$

$9Ae^{3x} - 3(3Ae^{3x} + B) + 2(Ae^{3x} + Bx + C) = 4e^{3x} + 2x$

$y''_{\text{ö}} = 9Ae^{3x}$

$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} - 3B + 2Ae^{3x} + 2Bx + 2C = 4e^{3x} + 2x$

$2Ae^{3x} + 2Bx + 2C - 3B = 4e^{3x} + 2x$

$2Ae^{3x} = 4e^{3x} \Rightarrow A = 2$

$2Bx = 2x \Rightarrow B = 1$

$2C - 3B = 0 \Rightarrow 2C = 3 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$

$y_{\text{ö}} = 2e^{3x} + x + \frac{3}{2}$

$\Rightarrow y = y_h + y_{\text{ö}} \Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + 2e^{3x} + x + \frac{3}{2}$

örnek: $y'' + y = x \cdot \sin x$

$y_h = ?$
 $y'' + y = 0$
 $m^2 + 1 = 0$
 $m_{1,2} = \pm i$
 $a = 0, b = 1$
 $y_h = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$
 $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$y_{\text{ö}} = ?$ Belirsiz yöntemi

$UC = \{x \cdot \sin x, x \cdot \cos x, x^2 \sin x, x^2 \cos x\}$

$(x \sin x)' = x \cos x + \sin x$
 $\cos x - x \sin x + \cos x$
 Sente Tekrar olacak

$T.O.P.M.M \rightarrow y_{\text{ö}} = Ax \sin x + Bx \cos x + Cx^2 \sin x + Dx^2 \cos x$

$y'_{\text{ö}} = A \sin x + Ax \cos x + B \cos x - Bx \sin x + 2Cx \sin x + Cx^2 \cos x + 2Dx \cos x - Dx^2 \sin x$

$y''_{\text{ö}} = A \cos x + A \cos x - Ax \sin x - B \sin x - B \sin x - Bx \cos x + 2C \sin x + 2Cx \cos x + 2Dx \cos x - 2Cx^2 \sin x + 2D \cos x - 2Dx \sin x - 2Dx \sin x - Dx^2 \cos x$

$y'' + y = x \cdot \sin x = (2A + 2D) \cos x + (2C - 2B) \sin x + 4Cx \cos x - 4Dx \sin x$

$x \cdot \sin x = -4Dx \sin x \Rightarrow D = -\frac{1}{4}$

$A + D = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4}, C = 0, 2C = 2B \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow y_{\text{ö}} = \frac{x \cdot \sin x}{4} - \frac{x^2 \cos x}{4}$

Abdulrahman Hamdi tarafından yazıldı

$y = y_h + y_{\text{ö}}$

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x \sin x}{4} - \frac{x^2 \cos x}{4}$

Diferansiyel Denklemler

parametrelerin Değişimi Metodu:

$$y = y_h + y_ö \rightarrow \begin{cases} \text{Belirsiz polinom, } e^{ax}, \sin, \cos, \text{ sabit} \\ \text{parameter değişimi} \end{cases}$$

Her durumu çözer $f(x)$ ne olursa olsun

örnek: $f(x) = \ln(x), \sin x, \cos x, \sec x, \dots$

özellikleri:

1) $y_ö = v_1 \cdot y_1 + v_2 \cdot y_2$

2) wranksiyam $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2 \neq 0$ lineer bağımsız olması

3) $v_1 = - \int \frac{y_2 \cdot f(x)}{w \cdot a} dx$

a : denklemden en yüksek mertebeden katsayı

$f(x)$: özel kısım tarafı

$v_2 = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{w \cdot a} dx$

4) $y = y_h + y_ö$

örnek: $y'' + y = \tan x$ genel çözüm bulunuz.

y_h

$y_ö$ parameter değişimi

$y'' + y = 0$

$y_ö = v_1 \cdot y_1 + v_2 \cdot y_2$

$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{reel} = 0 - a$

$y_ö = v_1 \cdot \cos x + v_2 \cdot \sin x$

$m = \pm i \Rightarrow \text{sanal} = \pm i$ katsayı $b=1$

$y_h = e^{ax} (C_1 \cdot \cos bx + C_2 \cdot \sin bx)$

$w = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$y_h = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$

$w=1, a=1, f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$v_1 = - \int \frac{\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{1 \cdot 1} dx \Rightarrow v_1 = - \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$

$\Rightarrow v_1 = - \int \frac{1}{\cos x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos x} dx$

$v_1 = - [\ln |\sec x + \tan x| + \sin x]$

+C kullanmaz büyütemde

$v_2 = \int \frac{\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{1} dx$

$v_2 = \int \sin x dx = -\cos x \Rightarrow y_ö = -\sin x \cdot \cos x - \ln |\sec x + \tan x| - \sin x \cdot \cos x$

$y = y_h + y_ö \Rightarrow y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x - \sin^2 x - \ln |\tan x + \sec x|$

$\sin^2 x = 2 \sin x \cdot \cos x$

Diferansiyel Denklemler

2.yol: Çok önemli değil

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_i = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

$$y_i' = C_1'(x) \cos x - C_1(x) \sin x + C_2'(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$

$$y_i'' = \underbrace{C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x}_0 + \underbrace{C_2(x) \cos x - C_1(x) \sin x}_{\text{kalır}}$$

$$y_i'' = \underbrace{C_2'(x) \cos x - C_1'(x) \sin x}_{\text{alacağız}} - C_2(x) \sin x - C_1(x) \cos x$$

$$C_2'(x) \cos x - C_1'(x) \sin x = \tan x \quad (1)$$

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \quad (2)$$

Her iki tarafı $\cos x$ çarpılır (1) denkleme ve (2) denkleme $\sin x$ çarpılır

$$\Rightarrow C_2'(x) \cos^2 x - C_1'(x) \sin x \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow C_1'(x) \cos x \sin x + C_2'(x) \sin^2 x = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{toplam} \end{array} \right\}$$

$$C_2'(x) [\cos^2 x + \sin^2 x] = \sin x$$

$$C_2'(x) = \sin x \Rightarrow C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\int C_1'(x) = - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx$$

$$\int C_2'(x) = \int \sin x dx$$

Diferansiyel Denklemler

yüksek mertebeden Sabit katsayılı Homojen dif. denklemler

$y^{(n)} \rightarrow$ mertebe (türev)

$y^n \rightarrow$ Derece (üs)

2. mertebe Sabit katsayılı homojen:

1) $\Delta > 0$ iki reel kök vardır $y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$

2) $\Delta = 0$ çift katlı kök $y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$

3) $\Delta < 0$ kompleks kökler $m_1 = a + bi$ Her zaman sadece pozitif sanal alınır $\Rightarrow y_h = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

$y^{(3)} = ? \Rightarrow y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$

$y^{(4)} = ? \Rightarrow y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + C_4 e^{m_4 x}$

örnek: $y^{(3)} - y' = 0$

$$m^3 - m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow m(m-1)(m+1) = 0$$

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = 1$$

$$m_3 = -1$$

$$y_h = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$$

örnek: $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y^{(3)} + y^{(2)} = 0$ genel homojen çözüm?

$$m^5 + 3m^4 + 3m^3 + m^2 = 0$$

$$m^2(m^3 + 3m^2 + 3m + 1) = 0$$

$$m^2(m+1)^3 = 0$$

$$m_1 = 0, m_3 = m_4 = m_5 = -1$$

$$m_2 = 0$$

$$y_h = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 x^2 e^{-x}$$

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 x^2 e^{-x}$$

Diferansiyel Denklemler

yüksek mertebeden Sabit katsayılı Homojen Olmayan dif. denklem

$$y^{(4)} - y^{(2)} = 0 \rightarrow \text{homojen}$$

$$y^{(4)} - y^{(2)} = e^x \rightarrow \text{homojen olmayan}$$

$$y = y_h + y_{\ddot{o}} \rightarrow \begin{cases} \text{Belirsiz katsayı} \\ \text{parameter değişimi} \end{cases}$$

örnek: $y^{(3)} - 5y^{(2)} - y' + 5y = 3x - 6 \cdot e^{2x} + 3 \sin x$

y_h

$y_{\ddot{o}}$: Belirsiz katsayı

$$m^3 - 5m^2 - m + 5 = 0$$

$$k_c = \{x, 1, e^{2x}, \sin x, \cos x\}$$

$$m^2(m-5) - (m-5) = 0$$

$$y_{\ddot{o}} = Ax + B + C \cdot e^{2x} + D \sin x + E \cos x$$

$$(m-5)(m^2-1) = 0$$

$$y'_{\ddot{o}} = A + 2C \cdot e^{2x} + D \cos x - E \sin x$$

$$m_1 = 5$$

$$y''_{\ddot{o}} = 4C \cdot e^{2x} - D \sin x - E \cos x$$

$$m_2 = 1$$

$$y^{(3)}_{\ddot{o}} = 8C \cdot e^{2x} - D \cos x + E \sin x$$

$$m_3 = -1$$

$$y_h = c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-x}$$

$$\cancel{8C \cdot e^{2x}} - \cancel{D \cos x} + \cancel{E \sin x} - \cancel{20C \cdot e^{2x}} + \cancel{5D \sin x} + \cancel{5E \cos x} - \cancel{A} - \cancel{2C \cdot e^{2x}} - \cancel{D \cos x} + \cancel{E \sin x}$$

$$+ \cancel{5Ax} + \cancel{5B} + \cancel{5C \cdot e^{2x}} + \cancel{5D \sin x} + \cancel{5E \cos x} = 3x - 6 \cdot e^{2x} + 3 \sin x$$

$$-9C \cdot e^{2x} = -6 \cdot e^{2x}$$

$$5A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow C = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\cos x (10E - 2D) = 0$$

$$10D + 2E = 3$$

$$B = 0$$

$$D = 5E$$

$$50E + 2E = 3$$

$$52E = 3 \Rightarrow E = \frac{3}{52}$$

$$y_{\ddot{o}} = \frac{3}{5}x + \frac{2}{3} \cdot e^{2x} + \frac{15}{52} \sin x + \frac{3}{52} \cos x$$

$$y = y_h + y_{\ddot{o}}$$

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{3}{5}x + \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{15}{52} \sin x + \frac{3}{52} \cos x$$

Diferansiyel Denklemler

Değişken Katsayı Homojen Dif. Denklemler:

*Cauchy-Euler yöntemi:

$$x^3 \cdot y'' + 3x^2 \cdot y' + 6xy = 0$$

Homojen

$$x^{n+1} \cdot y^{(n)} + x^n \cdot y^{(n-1)} + \dots + x \cdot y = 0$$

Cauchy-Euler

$$x^n \cdot y^{(n)} + x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + x \cdot y = 0$$

$$y = x^r \rightarrow \text{dönüşüm yapılacak}$$

Cauchy-Euler

mertebe indirgeme

Bütün türevler dif. de

yerine konular ve karakteristik

denklem elde edilir

diğer kökünü getirebilir ve

dönüşüm yaptıktan sonra

v'' ve v' kalır ve yeni

Bağımlı değişken dif

denklem gelir

örnek: $x^2 \cdot y'' + 5xy' + 6y = 0$

dif. denklem genel çözüm bulunuz.

1. adım

$$y = x^r$$

2. adım yerine

$$y' = r \cdot x^{r-1}$$

$$x^2(r^2 - r) \cdot x^{r-2} + 5x(r \cdot x^{r-1}) + 6 \cdot x^r = 0$$

$$y' = (r^2 - r) x^{r-2}$$

$$(r^2 - r)x^r + 5r \cdot x^r + 6x^r = 0$$

$$x^r (r^2 - r + 5r + 6) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r + 6 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

karakteristik denklem

karakteristik Dürümleri:

1) $\Delta > 0$ İki farklı reel kök vardır r_1 ve r_2

$$y_h = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$$

2) $\Delta = 0$ Çift katlı kök $r_1 = r_2$

$$y_1 = y_2$$

$$y_h = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \ln(x)$$

3) $\Delta < 0$ kompleks kök vardır $r_{1,2} = a \pm bi$

$$y_h = x^a [C_1 \cos(b \ln(x)) + C_2 \sin(b \ln(x))]$$

örnek: $x^2 \cdot y'' + 16x \cdot y' + 56y = 0$

$$y = x^r$$

$$y' = r \cdot x^{r-1}$$

$$y'' = (r^2 - r) x^{r-2}$$

$$x^2(r^2 - r) \cdot x^{r-2} + 16x(r \cdot x^{r-1}) + 56 \cdot x^r = 0$$

$$x^r \cdot (r^2 - r) + 16x \cdot r \cdot x^{r-1} + 56 \cdot x^r = 0$$

$$x^r [r^2 + 15r + 56] = 0 \Rightarrow (r+7)(r+8) = 0$$

$$r_1 = -7, r_2 = -8 \Rightarrow y_h = C_1 x^{-7} + C_2 x^{-8}$$

Diferansiyel Denklemler

$y'' = ?$ parametre değişim yöntemi

$$y'' = v_1 \cdot y_1 + v_2 \cdot y_2$$

$$y'' = v_1 \cdot x^5 + v_2 \cdot x^{-1}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' \Rightarrow W = \begin{vmatrix} x^5 & \frac{1}{x} \\ 5x^4 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{x^5}{x^2} - \frac{5x^4}{x} = -x^3 - 5x^3 = -6x^3$$
$$\Rightarrow W = -6x^3 \quad f(x) = x^2 \quad \alpha = 1$$

$$v_1 = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W \cdot \alpha} dx = -\int \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2}{-6x^3} dx \Rightarrow = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{6x}$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W \cdot \alpha} dx = \int \frac{x^5 \cdot x^2}{-6x^3} dx = -\frac{1}{6} \int x^4 dx = -\frac{1}{30} x^5$$

$$y'' = -\frac{x^5}{6x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{30} x^5 \Rightarrow y'' = -\frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{30} x^4 \Rightarrow y'' = -\frac{1}{5} x^4$$

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 \cdot x^5 + c_2 \cdot x^{-1} - \frac{1}{5} x^5$$

INFINITY TEAM
Since 2020

Diferansiyel Denklemler

*Laplace Dönüşümü

$f(x)$ veya $f(t)$ $\xrightarrow[\text{dönüşüm}]{\text{integral}}$ $F(s)$

değişken x veya t den s 'ye dönüşür.

$L\{\}$ Laplace sembolü

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \rightarrow \text{Laplace genel formülü}$$

örnek: $f(t) = 3$ Laplace yöntemiyle çözün

$$L\{f(t)\} = L\{3\} = \int_0^{\infty} 3 \cdot e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow = 3 \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$e^{-st} = u$$

$$\Rightarrow -s \cdot e^{-st} dt = du$$

$$\Rightarrow e^{-st} dt = \frac{-du}{s}$$

$$\Rightarrow 3 \int \frac{-du}{s} = \frac{-3}{s} \cdot u \Rightarrow \frac{-3}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{-3}{s} (e^{-\infty \cdot s} - e^0)$$

$$= \frac{-3}{s} (0 - 1)$$

$$= \frac{3}{s}$$

$$e \approx 2,7 \Rightarrow 2,7 > 1$$

$$e^{\infty} = \infty$$

$$e^{-\infty} = 0$$

*Laplace Kuralları:

$$1) \text{ Sabit sayı } L\{c\} = \frac{c}{s}$$

$$2) L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$3) L\{c \cdot f(t)\} = c \cdot L\{f(t)\} = c \cdot F(s) \Rightarrow \text{ör} L\{3t\} = 3 \cdot L\{t\} = \frac{3}{s^2}$$

$$4) L\{f(t) \pm g(t)\} = L\{f(t)\} \pm L\{g(t)\} \Rightarrow \text{ör} L\{t+1\} = L\{t\} + L\{1\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s^2}$$

$$5) L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \text{ör} L\{t^2\} = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}$$

$$6) L\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c} \quad \text{ör: } L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$

$$L\{e^{8t}\} = \frac{1}{s-8}$$

$$L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$$

$$L\{2 \cdot e^{-t}\} = 2 \cdot L\{e^{-t}\} = \frac{2}{s+1}$$

Diferansiyel Denklemler

$$7) L\{\sin(ct)\} = \frac{c}{s^2 + c^2}$$

$$\text{ör: } L\{\sin 5t\} = \frac{5}{s^2 + 25}$$

$$L\{\sin 8t\} = \frac{8}{s^2 + 64}$$

$$8) L\{\cos(ct)\} = \frac{s}{s^2 + c^2}$$

$$\text{ör: } L\{\cos(2t)\} = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$L\{\cos(5t)\} = \frac{s}{s^2 + 25}$$

$$9) L\{e^{ct} \cdot t\} = \frac{1}{(s-c)^2}$$

e^{ct} yanına fonksiyon gelirse

$$L\{e^{ct} \cdot t^n\} = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}$$

s yerine $(s-a)$ yazılır

$$L\{e^{ct} \cdot \cos(kt)\} = \frac{s}{(s-c)^2 + k^2}$$

$$L\{e^{ct} \cdot \sin(kt)\} = \frac{k}{(s-c)^2 + k^2}$$

$$10) L\{t^n \cdot \sin(ct)\} = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{c}{s^2 + c^2} \right)$$

$$\text{ör: } L\{t \cdot \sin 5t\} = (-1)^1 \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{5}{s^2 + 25} \right) =$$

$$\frac{-25 \cdot 5}{(s^2 + 25)^2} = \frac{-125}{(s^2 + 25)^2}$$

$$L\{t^n \cdot \cos(ct)\} = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{s}{s^2 + c^2} \right)$$

$$\text{ör: } L\{t \cdot \cos 2t\} = (-1)^1 \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 4} \right) = - \left[\frac{s^2 + 4 - 2s \cdot s}{(s^2 + 4)^2} \right] = \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2}$$

*Ters Laplace Dönüşümü:

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$F \circ F^{-1} = I$$

$$\Rightarrow L^{-1} \{ L\{f(t)\} \} = f(t) \quad \Rightarrow L^{-1} \{ F(s) \} = f(t)$$

örnekler ve kuralları:

$$1) L^{-1} \left\{ \frac{2}{s} \right\} = 2 \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 2$$

$$2) L\{t\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{5}{s^2} \right\} = 5t$$

$$3) L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^6} \right\} = \frac{120}{120} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^6} \right\} = \frac{1}{120} \cdot L^{-1} \left\{ \frac{5!}{s^6} \right\} = \frac{t^5}{120}$$

$$4) L\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c} \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{2}{s+5} \right\} = 2 \cdot L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+5} \right\} = 2 \cdot e^{-5t}$$

$$5) L\{\sin(ct)\} = \frac{c}{s^2 + c^2} \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 36} \right\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{s^2 + 36} = \frac{1}{6} L^{-1} \left\{ \frac{6}{s^2 + 36} \right\} = \frac{\sin 6t}{6}$$

$$6) L\{\cos(ct)\} = \frac{s}{s^2 + c^2} \Rightarrow L^{-1} \left\{ \frac{5s}{s^2 + 9} \right\} = 5 \cos(3t)$$

örnekler:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-3)^4} \right\} = \frac{e^{3t} \cdot t^3}{6}$$

$$t^3 \cdot e^{3t} = \frac{3!}{3^4} = \frac{3!}{(s-3)^4}$$

Diferansiyel Denklemler

$$2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-2)^2 + 25} \right\} = \frac{5}{5} \square = \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{(s-2)^2 + 25} \right\} = \frac{\sin 5t \cdot e^{2t}}{5}$$

$$3) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{(s+3)^2 + 49} \right\} = \cos(7t) \cdot e^{-3t}$$

* Basit Kesirlere Ayırma:

1) paydaki çarpanlar 1. derece: $(s+a), (s+b), (s+c) \dots$

örnek. $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s-9}{s^2+4s+3} \right\} = ?$

$$\frac{6s-9}{(s+3)(s+1)} \Rightarrow \frac{6s-9}{(s+3)(s+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1}$$

$$6s-9 = As+A+Bs+3B$$

$$\begin{cases} A+B=6 \\ A+3B=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2B=15 \\ B=-\frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow A=6+\frac{15}{2}=\frac{27}{2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{15}{2}}{s+3} + \frac{\frac{27}{2}}{s+1} \right\} = \frac{-15}{2} \cdot e^{-3t} + \frac{27}{2} e^{-t}$$

örnek $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2-9} \right\} = ?$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2-9} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-3}$$

$$1 = As+Bs+3A-3B=0$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

$$A-B=\frac{1}{3}$$

$$2A=\frac{1}{3} \Rightarrow A=\frac{1}{6} \Rightarrow B=-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-3} \right\} = \frac{1}{6} \{ e^{-3t} - e^{3t} \}$$

2) paydada 2. derece çarpan olursa: $s^2+a^2, s^2+b^2 \dots$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)(s^2+4)} \right\} = ?$$

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B \cdot s}{s^2+4}$$

Not: Her zaman payda s çarpanır

$$\Rightarrow 1 = As^2+4A+Bs^2-4B$$

$$A+B=0, \quad A-B=\frac{1}{4} \Rightarrow A=\frac{1}{8}, \quad B=-\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2+4} \right\} = \frac{1}{8} \{ e^t - \frac{1}{2} \sin 2t \}$$

Diferansiyel Denklemler

3) paydadada Tam Kare Çarpan olursa: $s^2, (s-1)^2, (s+1)^2, \dots$

örnek: $L^{-1} \left\{ \frac{5s+2}{(s+3)(s-1)^2} \right\} = ?$

$$\frac{5s+2}{(s+3)(s-1)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$5s+2 = A(s-1)^2 + B(s^2+2s-3) + C(s+3)$$

$$5s+2 = As^2 - 2As + A + Bs^2 + 2Bs - 3B + Cs + 3C$$

$$5s+2 = s^2(A+B) + s(2B-2A+C) + A-3B+3C$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

$$2B-2A+C=5 \Rightarrow 2B+2B+C=5 \Rightarrow 4B+C=5$$

$$A-3B+3C=2 \Rightarrow -B-3B+3C=2 \Rightarrow 3C-4B=2$$

$$\Rightarrow 4C=7 \Rightarrow C=\frac{7}{4}$$

$$4B=5-\frac{7}{4} \Rightarrow 4B=\frac{13}{4} \Rightarrow B=\frac{13}{16}$$

$$A=-\frac{13}{16}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{-\frac{13}{16}}{s+3} + \frac{\frac{13}{16}}{s-1} + \frac{\frac{7}{4}}{(s-1)^2} \right\} \quad L\{e^{ct} \cdot t\} = \frac{1}{(s-c)^2}$$

$$-\frac{13}{16} \cdot e^{-3t} + \frac{13}{16} e^t + \frac{7}{4} \cdot e^t \cdot t$$

Laplace Dönüşümü ile Dif. Denklemleri çözme:

1. şart: Başlangıç değer problemi olmalı, ör: $y(1) = \dots$ $y'(1) = \dots$

örnek: $2y'' - 6y' - 8y = 0$ $y(1) = 4$, $y'(1) = 5$ örnek soru

2. şart: y ve y' li ifadenin katsayılarının sabit sayı olmalı.

~~ör~~ $xy'' - 3x^3y' + 5y = 0$ ∇ olmaz
= değişken

~~ör~~ $y'' - 5y' + 4y = e^{2x}$

En önemli formüller : $L\{y\} = Y(s)$

$$L\{y'\} = s \cdot Y(s) - y(0)$$

$$L\{y''\} = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)$$

$$L\{y'''\} = s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0)$$

Diferansiyel Denklemler

örnek: $y' - 2y = e^{2x}$, $y(0) = 1$ dif. denklemini Laplace dönüşümü ile çözüyoruz.

1. adım $L\{y' - 2y\} = L\{e^{2x}\}$

$$L\{y'\} - 2L\{y\} = \frac{1}{s-2}$$

2. adım $s \cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_1 - 2Y(s) = \frac{1}{s-2} + 1$

$$sY(s) - 2Y(s) = \frac{s-1}{s-2}$$

$$Y(s)[s-2] = \frac{s-1}{s-2} \Rightarrow Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2}$$

$$\Rightarrow L\{y\} = \frac{s-1}{(s-2)^2}$$

3. adım Her iki taraf L^{-1} alırız $L \circ L^{-1} = 1$

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)^2}\right\}$$

$$\frac{s-1}{(s-2)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2}$$

$$s-1 = As - 2A + B$$

$$A=1 \Rightarrow B-2A = -1$$

$$B=1$$

$$y = L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{s-2}}_{e^{2x}} + \underbrace{\frac{1}{(s-2)^2}}_{e^{2x} \cdot x}\right\} \quad L\{x\} = \frac{1}{s^2}$$

$$y = e^{2x} + e^{2x} \cdot x$$

örnek: $y'' - 4y' - 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, " , " , " , "

$$L\{y'' - 4y' - 5y\} = L\{0\}$$

$$L\{y''\} - 4L\{y'\} - 5L\{y\} = 0$$

$$s^2 Y(s) - \underbrace{s y(0)}_1 - \underbrace{y'(0)}_1 - 4s Y(s) - 4 \cdot \underbrace{y(0)}_1 - 5 Y(s) = 0$$

$$Y(s)[s^2 - 4s - 5] = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 9} \Rightarrow L\{y\} = \frac{1}{s^2 - 9}$$

$$\Rightarrow L^{-1} = y = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 9}\right\}$$

$$\frac{1}{s^2 - 9} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-3}$$

$$1 = s(A+B) + 3(B-A) \Rightarrow B = \frac{2}{3},$$

$$\Rightarrow A = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3} L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+3} + \frac{1}{s-3}\right\}$$

$$y = \frac{2}{3} \{-e^{-3t} + e^{3t}\}$$